

論文

枯渇性資源と環境が経済成長に与える影響の一考察Ⅱ

—— 数値計算を利用したモデルの精緻化 ——

拓殖大学 政経学部

京都学園大学 経済学部

宮永 輝

久下 沼 仁 筈

Email: tmiyana@ner.takushoku-u.ac.jpkugenuma@kyotogakuen.ac.jp

要 旨

規模に関する収穫逓増による「経済成長率の発散」という問題点を枯渇性資源の制約で解決したモデルを応用し、二酸化炭素ガスを念頭に置いた「環境クズネッツ曲線」の導出を目的として理論モデルの構築と数値シミュレーションを行った。その際に存在したパラメータ設定上の制限という問題点を取り除くべく、数値演算を使用してパラメータの設定を行ったことで、逆 U 字形状の「環境クズネッツ曲線」の導出と「経済成長率の収束」を同時に達成することが可能となった。

キーワード：経済成長、規模に関する収穫逓増、環境クズネッツ曲線、枯渇性資源

1. 環境クズネッツ曲線と経済成長理論

1-1. 環境クズネッツ曲線について

環境クズネッツ曲線は、Kuznets (1955) で示された「経済成長と所得分配」の関係を「経済成長と環境」に置き換えて作られた仮説である。元々のクズネッツ曲線は、経済の成長初期には所得分配の不平等、つまり格差は広がっていくが、経済がさらに成長していくにしたがって格差が縮まっていくという関係を示したものである。格差（不平等度）を縦軸にとり、横軸に 1 人あたり所得水準を取ってグラフに表すと、逆 U 字型のグラフが描けることから、このような経済成長に対して逆 U 字型の関係がある事象について「クズネッツ曲線」の名称がつけられている。

そのようなクズネッツ曲線同様の性質を持つ事象の一つに「環境」クズネッツ曲線がある。その性格は、「環境」が冠されないクズネッツ曲線がそうであるように、経済成長に伴って環境汚染は増加するがやがて減少に転じるという性格のものである。環境についてそれを始め

て提唱したのは World Bank (1992) である。その年代を見てもわかるように、ここでの「環境」とはいわゆる大気汚染であったり、水質汚染であったりするが、近年では、その「環境」について二酸化炭素 (CO_2) をはじめとする地球温暖化ガスに拡張することも議論の対象となってきた¹。

World Bank (1992) における「環境クズネッツ曲線」は実証的な研究であるが、この環境と経済成長の関係を理論的に検討したのは Stokey (1998) である。この論文はベースに Ramsey (1928) モデルを用い、生産関数に AK モデルを利用して、排出された汚染物質の蓄積が消費者の効用に影響を与えると仮定することで逆 U 字型の環境クズネッツ曲線を導出している。結果としては、AK モデルによる規模の経済では恒常的成長が達成されず、このモデル上では内生的な経済成長と環境クズネッツ曲線は両立することはなかった。この点は以後の研究課題となり、この後も内生的な経済成長と環境クズネッツ曲線の両立についていくつかの研究がなされている。

1—2. 経済成長と枯渇性資源の関係

二酸化炭素 (CO_2) をはじめとする地球温暖化ガスに環境クズネッツ曲線を拡張するには、その発生源となる化石燃料について触れられなければならない。ローマクラブの『成長の限界』や経済成長と気候変動を扱った Stern (2007) をはじめとして、化石燃料が経済成長を制約するという発想はいくつかあったが、理論的にモデルを構築してそれを議論したモデルは少ない。

化石燃料の特徴は、その存在が有限であり、再生不可能な資源であるということにあるが、このような資源の有限性が経済成長に与える影響について議論した論文に浅子・川西・小野 (2002) がある。この論文では Ramsey (1928) で構築されたモデルに枯渇性資源を取り入れて、枯渇性資源と経済成長の関係を分析している。その結論は資源が枯渇することで経済成長率が次第に低下していくとしている。ただし、このモデルにおいては、Stokey (1998) のモデルのように内生的な経済成長を生み出すエンジンが設定されていないことから、最終的には資源量の減少により経済は収縮に向かうことが示されている。

以上の二点、すなわち枯渇性資源と内生的成長を同時に満たすモデルに宮永 (2000) モデルがある。このモデルは Romer (1985) の内生的経済成長理論を改良したものである。Romer モデルの特徴は成長のエンジンを生産関数の「規模に関する収穫逓増」に置き、経済成長すなわち資本蓄積にしたがって資本の限界生産性を増大させることで、経済の持続的な成長を実現している。しかし「規模に関する収穫逓増」の性質として、資本を蓄積すればするほど資本の限界生産力は上昇していくことから、資本の豊富な経済すなわち先進国経済は経済成長率が高くなり、資本の乏しい経済すなわち発展途上国は経済成長率が低くなるという、一般に観察される現象（成長率の収束）とは異なる結果が得られている。これは「規模

¹ Stern (2007) pp.170-191 参照

に関する収穫逡増」のもつ基本的な性質であり、この性質故に成長エンジンとして「規模に関する収穫逡増」を用いるモデルは少ないのが現状である。

そのような問題点に対して、宮永（2000）では枯渇資源の減少による産出への負の影響を用いて成長率を収束させることを試みた。このモデルでは財生産に資本と化石燃料を含む枯渇性資源が必要であり、資源をいかにして使い尽くすかが経済成長の鍵となっている。経済成長のエンジンとして資本には「規模に対する収穫逡増」を仮定し、枯渇性資源の制約と資本の収穫逡増をバランスさせることで、恒常的な経済成長と成長率の収束すなわち経済の資本量が大きくなれば経済成長率は低下するという命題を両立させている。ここでいうところの資本が持つ規模の経済とは、一種の省エネ技術であり再生可能資源による代替も表していると考えることができる。このモデルを用いて、宮永（2000）では経済に均衡成長率が存在すること、および経済が均衡成長率へと収束することを理論的に証明した。

それに続く宮永（2002）では数値シミュレーションを用いて、経済が資本の乏しい経済の経済成長率が高く、資本の豊富な経済は経済成長率が低くなるという、一般に観察される「成長率の収束」を宮永（2000）モデルが満たすか否かを検討した。その結果、同モデルが「成長率の収束」を満たすことが可能であると示された。

1—3. 枯渇資源制約付き内生的成長モデルを用いた環境クズネッツ曲線の導出

枯渇性資源と内生的成長を同時に可能にする宮永（2000）・宮永（2002）モデルのシステムを生かして、宮永（2009）では二酸化炭素ガスを念頭に置いた環境クズネッツ曲線を理論的に導出することを試みた。システムは基本的に宮永（2000）・宮永（2002）と同様であるが、環境が経済に与えるマイナスの効果は効用関数ではなく生産関数に与えられる点が特徴である。環境と経済成長の関係では、「所得が上昇すると環境という財の需要が高まる」という理由で環境クズネッツ曲線が描かれるという発想があるが、枯渇性資源の制約という観点からすれば、環境という財の需要よりも資源の減少から直接二酸化炭素ガスの排出量が減少するという理由がすでに存在し、二酸化炭素ガスによる気候への影響は効用関数よりも生産関数に与えた方がより効果的と思われるからである。

そのような改良を施した宮永（2009）モデルは、数値シミュレーションを用いて逆U字型の環境クズネッツ曲線を描くことには成功したが、そのケースでは成長率の収束を満足することができず、完全な成功とはいえなかった。その原因の一つとして考えられることは、数値シミュレーションのパラメータ設定に問題があったことである。特に資源の外部性を表すパラメータを資源消費量初期値算出のために実際よりも過大と思われる数値にセットしたことから、資源消費量変化が経済成長に過大に影響を与えると考えられるからである。

このようなパラメータ設定の問題は宮永（2009）モデルだけではなく、宮永（2002）モデルでも同様に発生することから、宮永（2002）モデルに対して資源の外部性を表すパラメータを任意に設定し、資源消費量初期値を数値演算で導出するという改良を施したものが宮永（2014）である。そのような特徴を持つ宮永（2014）モデルは資源の外部性を表すパラメー

タの設定と、そのパラメータ設定に応じたその他観察不可能なパラメータの調整により、より現実に近い形で経済成長を描写することが可能になった。

宮永 (2014) で得られた結果を宮永 (2009) モデルに応用して、環境クズネッツ曲線と成長率の収束を同時に満たすシステムを構築しようというのが本論文の目的である。

2. 理論モデル

本章では、宮永 (2009) で構築された枯渇資源制約付内生的成長モデルについて概説する。

モデルの定式化は以下の 8 点である。第一に、各経済は自給自足の閉鎖経済系であると仮定する。第二に、この経済では単一の（資本財にも消費財にもなる）生産物が資本と資源から生産される。第三に、資源とは鉱物資源のように再生産することが不可能な生産要素を示し、その埋蔵量は一定（追加の資源が発見されることはない）である。また、採掘費用はゼロとする。第四に、資本とは資源でない生産要素（再生産可能）すべてを意味する。すなわち、通常の物的資本の他に人的資本も含む「広範囲な資本」(broad capital) を示している。第五に、代表的消費者は無限期間生存し、効用の現在価値を最大化すると仮定する。第六に、この経済では人口は一定であると仮定する。第七に、汚染物質は枯渇資源にのみ依存して発生し、生産活動（生産関数）にのみ影響を与える。第八に汚染物質は当期の排出すなわちフローのみが生産活動に影響を与えるものとする²。

以上 8 点の定式化を用いてモデルを構築する。

モデルは上述の資源制約と生産関数に通常の効用関数と予算制約式、及び最大化の一階の条件の導出には用いないが、トランジショナル・ダイナミクスを考えるのに必要な制約式として、自然効率性条件 (natural efficiency condition)³ の制約式を加えた以下の (1)～(6) の方程式体系で表される。

$$\text{目的関数：} \quad \max_{c, k, e, r} U = \int_0^{\infty} u(t) \cdot \exp(-\rho t) dt = \int_0^{\infty} \log c(t) \cdot \exp(-\rho t) dt \quad (1)$$

制約条件

$$\text{資本蓄積式：} \quad \frac{dk}{dt} = y(t) - c(t) \quad (2)$$

$$\text{生産関数：} \quad y(t) = \bar{A} \cdot k(1)^{1-\alpha} \cdot e(t)^{\alpha} \cdot K(t)^{\phi} \cdot E(t)^{\phi} \cdot P(t)^{-\tau} \quad (3)$$

$$\text{資源制約式：} \quad \frac{dr(t)}{de} = -e(t) \quad (4)$$

$$\text{汚染物質発生式：} \quad \rho(t) = b \cdot e(t) \quad (5)$$

$$\text{自然効率性条件：} \quad \frac{\partial y(t)}{\partial k(t)} = \frac{d}{dt} \cdot \log \left(\frac{\partial y(t)}{\partial e(t)} \right) \quad (6)$$

² 当期の排出は一期間で自然浄化する、すなわち自然浄化率 100% と考えることもできる。

³ 自然効率性条件とは、 t 期の資源（消費量）の限界生産力の変動率が資本の限界生産力と等しくなるように動くという条件である。

$c(t)$ 、 $e(t)$ 、 $k(t)$ 、 $r(t)$ 、 $\rho(t)$ は各々 t 期の一人あたり消費量、資源消費量、資本量、資源埋蔵量、汚染物質排出量であり、 U は効用の現在価値の合計を表し、 t 期の効用は $u(t) = \log c(t)$ の対数型であると仮定する。また、 $\rho(>0)$ は割引率、 $\alpha(0 < \alpha < 1)$ は資源が生産に占めるシェア、 $\phi \cdot \psi \cdot \tau$ は各々（一人あたりではなく）経済全体の資源量・資本量・汚染排出量が生産に与える外部性でそれぞれ正の定数である（したがって、資源と資本は正の外部性、汚染物質は負の外部性を持つ）。また、 $\bar{A}(>0)$ は生産関数のパラメータである。そして、資本の減価はないものと仮定し、初期条件 $k(0) = k_0$ 、 $r(0) = r_0$ 、および非負条件 $c(t) \geq 0$ 、 $k(t) \geq 0$ 、 $e(t) \geq 0$ 、 $r(t) \geq 0$ 、 $\rho(t) \geq 0$ が付け加わってモデルが成立する。

宮永（2000）に対する本モデル最大の改良点は（5）の汚染物質発生式である。環境と経済成長の関係を扱ったモデルはいくつかあるが、基本的に生産もしくは消費に伴って汚染物質が発生するものであった。それに対し、本モデルでは枯渇資源が存在していることから、そういった派生的な形ではなく直接資源から汚染物質が発生するという形を取ることが可能となっている。この場合の汚染物質は二酸化炭素をはじめとする温暖化ガスであることから、汚染物質の発生は基本的に枯渇資源の一次関数として表すことができる⁴。

また生産に対する効果であるが、本モデルでは計算の簡便化のためフローの汚染物質排出量に依存することとした。Stokey（1998）ではストックとしての汚染物質（汚染蓄積）が経済に影響しているが、それは今後の課題として残しておくこととしたい。

最大化の条件を導出するため、生産関数（3）に汚染物質発生式（5）を代入し、当該期価値ハミルトニアンを（7）のように仮定して行った最大化の一階の条件は（9）～（11）のようになる⁵。

$$H(t) = \log c(t) + \lambda(t) \{ b^{-\tau} \cdot \bar{A} \cdot k(t)^{1-\alpha} \cdot e(t)^{\alpha} \cdot K(t)^{\phi} \cdot E(t)^{\phi-\tau} - c(t) \} + \mu(t) \{-e(t)\} \quad (7)$$

$$R_{c(t)} = -R_{\lambda(t)} \quad (8)$$

$$\frac{\mu(t)}{\lambda(t)} = \alpha \cdot b^{-\tau} \cdot \bar{A} \cdot k(t)^{1-\alpha} \cdot e(t)^{\alpha-1} \cdot K(t)^{\phi} \cdot E(t)^{\phi-\tau} = \alpha A \cdot k(t)^{1-\alpha+\phi} \cdot e(t)^{-1+\alpha+\phi-\tau} \quad (9)$$

$$\begin{aligned} R_{\lambda(t)} &= -\{ (1-\alpha) b^{-\tau} \cdot \bar{A} \cdot k(t)^{-\alpha} \cdot e(t)^{\alpha} \cdot K(t)^{\phi} \cdot E(t)^{\phi-\tau} - \rho \} \\ &= -\{ (1-\alpha) A \cdot k(t)^{-\alpha+\phi} \cdot e(t)^{\alpha+\phi-\tau} - \rho \} \end{aligned} \quad (10)$$

$$R_{\mu(t)} = \rho \quad (11)$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \{ \lambda(t) \cdot k(t) \exp(-\rho t) \} = 0 \quad \text{横断面条件}$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \{ \mu(t) \cdot r(t) \exp(-\rho t) \} = 0 \quad \text{横断面条件}$$

$\lambda(t)$ 、 $\mu(t)$ はそれぞれ資本ストック $k(t)$ と資源埋蔵量 $r(t)$ のシャドウプライスで、 $R_{\lambda(t)}$ 、 $R_{\mu(t)}$ は各々 $\lambda(t)$ 、 $\mu(t)$ の変化率、 A は $A = b^{-\tau} \cdot \bar{A} \cdot N^{\phi+\phi-\tau}$ で定数である⁶。最大化の一階の

⁴ 温暖化ガスの主な原因とされている二酸化炭素は枯渇資源に含まれる炭素が発生源であることから、石油・石炭等で利用効率の違いはあるものの、一次関数で表すことが可能と考えられる。

⁵ 最大化の一階の条件の導出過程については宮永（2000）pp.73-75 を参照のこと。

条件から最終的に消費量成長率、資本量成長率、資源消費量成長率、資源賦存量成長率 $r_{c(t)}$ 、 $r_{k(t)}$ 、 $r_{e(t)}$ 、 $r_{r(t)}$ の恒常的均衡値 r_c^* 、 r_k^* 、 r_e^* 、 r_r^* は以下のように決定される⁷。

$$r_e^* = r_r^* = -\rho \quad (12)$$

$$r_k^* = r_c^* = \left(\frac{\alpha + \phi - \tau}{-\alpha + \phi} \right) \cdot \rho \quad (13)$$

ここで宮永（2000）のモデルと比較してみよう。宮永（2000）では恒常的均衡値は以下の2式で表されている。

$$r_e^* = r_r^* = -\rho$$

$$r_k^* = r_c^* = \left(\frac{\alpha + \phi}{-\alpha + \phi} \right) \cdot \rho$$

上式と(12)、(13)式を比較すれば(12)式には変化がないが、(13)式の恒常的均衡値つまり消費と資本の成長率が汚染排出の影響を受けて $\frac{\tau}{-\alpha + \phi} \cdot \rho$ だけ低下しているのがわかる。すなわち、環境汚染が存在しない場合に比して、経済成長率は低下することがモデルの比較から導き出せる。

3. ダイナミクス

3-1. 収束経路の導出

ここでは数値シミュレーションを行うために収束経路を直線に近似して代数的に導出する。そのやり方は宮永（2000）を数値シミュレーションモデルとした宮永（2001）と同様、位相図上の収束経路を近似的に一次式として導き出し、収束経路上の経済において資本量と成長率、所得と成長率の関係が収束仮説を満たすか否かを検証していく。

最初に位相図の導出を概説する。モデルで用いられている変数 $c(t)$ 、 $k(t)$ 、 $e(t)$ 、 $r(t)$ は恒常状態においても恒常成長率で成長（減少）するので、そのまま分析に用いることはできない。そこで、恒常的均衡値が定数となるような変数を定義してそれを分析に用いることにする。その恒常的均衡値が定数となるような変数 x 、 z 、 w を以下のように定義する。

$$x(t) = MPK = \left[(1 - \alpha) A \cdot k(t)^{-\alpha + \phi} \cdot e(t)^{\alpha + \phi - \tau} \right]$$

$$z(t) = \frac{c(t)}{k(t)}$$

⁶ N は人口を示す変数で第六の仮定から定数である。また、この生産関数は宮永（2000）もしくは宮永（2002）の生産関数の ϕ を $\phi - \tau$ に置き換えたものとなる。以下で行う計算過程についても同様である。

⁷ 詳細な導出過程は宮永（2000）pp.75-76 を参照のこと。

$$w(t) = \frac{e(t)}{k(t)}$$

すると、(12)、(13)から恒常状態は以下の形で表される。

$$Y_e^* = Y_r^* = \left(\frac{\alpha - \phi}{\alpha + \phi - \tau} \right) \cdot Y_k^* = \left(\frac{\alpha - \phi}{\alpha + \phi - \tau} \right) \cdot Y_c^* = -\rho \quad (14)$$

したがって、恒常状態で x 、 z 、 w は次のような定数となる。

$$x^* = [(1 - \alpha A \cdot k^{-\alpha+\phi} \cdot e^{\alpha+\phi-\tau})^*] = \frac{\phi + \phi - \tau}{-\alpha + \phi} \cdot \rho \quad (15)$$

$$z^* = \left[\frac{c}{k} \right]^* = \frac{\alpha(-1 + \alpha + \phi - \tau) + \phi}{(1 - \alpha)(-\alpha + \phi)} \cdot \rho \quad (16)$$

$$w^* = \left[\frac{e}{r} \right]^* = \rho \quad (17)$$

次に、 $Y_{c(t)}$ 、 $Y_{k(t)}$ 、 $Y_{e(t)}$ 、 $Y_{r(t)}$ を導出する。

$Y_{c(t)}$ の導出は、一階の条件(8)、(9)から以下の式が得られる。

$$Y_{c(t)} = x(t) - \rho \quad (18)$$

次に $Y_{k(t)}$ は、予算制約式(2)を $k(t)$ で割り、 x と z の関数として表す。

$$Y_{k(t)} = \frac{MPK}{1 - \alpha} - \left[\frac{c(t)}{k(t)} \right] = \frac{x(t)}{1 - \alpha} - z(t) \quad (19)$$

$Y_{e(t)}$ は、自然効率性条件を用いれば、次のように表される。

$$Y_{e(t)} = -\frac{\phi}{(1 - \alpha)(-1 + \alpha + \phi - \tau)} \cdot x(t) + \frac{1 - \alpha + \phi}{-1 + \alpha + \phi - \tau} \cdot z(t) \quad (20)$$

最後に、 $Y_{r(t)}$ は資源制約式(4)を $r(t)$ で割って得られる。

$$Y_{r(t)} = -\frac{e(t)}{r(t)} = -w \quad (21)$$

(18)～(21)の式を用いて変数 x 、 z 、 w の増加率、 Y_x 、 Y_z 、 Y_w 、は以下の式で与えられる⁸。

$$Y_{x(t)} = -\frac{\alpha(-1 + \alpha + \phi - \tau) + \phi}{(1 - \alpha)(-1 + \alpha + \phi - \tau)} x(t) + \frac{\phi + \phi - \tau}{-1 + \alpha + \phi - \tau} z(t) \quad (22)$$

$$Y_{z(t)} = \frac{-\alpha}{1-\alpha} x(t) + z(t) - \rho \quad (23)$$

$$Y_{w(t)} = -\frac{\phi}{(1-\alpha)(-1+\alpha+\phi-\tau)} x(t) + \frac{1-\alpha+\phi}{-1+\alpha+\phi-\tau} z(t) + w(t) \quad (24)$$

$Y_{x(t)}$ 、 $Y_{z(t)}$ 、 $Y_{w(t)}$ が(22)～(24)のように得られたので、これを用いて $dx/dt=0$ 、 $dz/dt=0$ 、 $dw/dt=0$ の必要条件を x 、 z 、 w の関数として表すと以下のようなになる。

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt}=0 : \quad & z = \frac{\alpha(-1+\alpha+\phi-\tau)+\phi}{(1-\alpha)(\phi+\phi-\tau)} \cdot x \quad \text{または} \\ & x=0 \end{aligned} \quad (25)$$

$$\begin{aligned} \frac{dz}{dt}=0 : \quad & z = -\frac{-\alpha}{1-\alpha} \cdot x + \rho \quad \text{または} \\ & z=0 \end{aligned} \quad (26)$$

$$\begin{aligned} \frac{dw}{dt}=0 : \quad & w = \frac{\phi}{(1-\alpha)(-1+\alpha+\phi-\tau)} \cdot x - \frac{1-\alpha+\phi}{-1+\alpha+\phi-\tau} \cdot z \\ & \text{または } w=0 \end{aligned} \quad (27)$$

$dx/dt=0$ 、 $dz/dt=0$ 、 $dw/dt=0$ を満たす点の軌跡が(25)～(27)として導出されたので、これら3式を用いて位相図を描く。

最初に(22)と(23)をみると、この2式は w に依存しないので、 x 、 z に関する位相図は $x-z$ 平面のみで表すことができる。

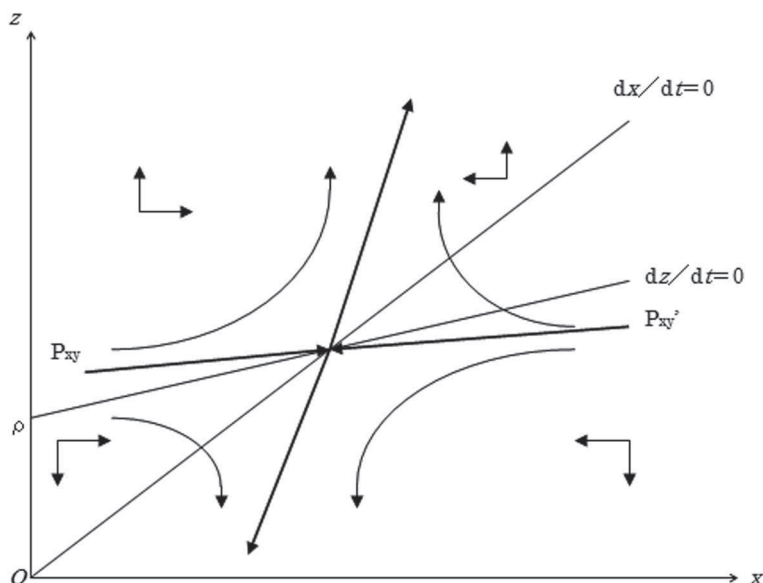


図1. $x-z$ 平面の位相図

⁸ 詳細な、 Y_x 、 Y_z 、 Y_w 、の導出過程は宮永（2000）pp.77-78を参照のこと。

解に収束可能なパラメータの制約は $1-\alpha < \phi-\tau$ なので、この場合のみにについて考えてみると、(22)の右辺第一項目が $\{x/(-1+\alpha+\phi-\tau)\} > 0$ となり、経済は $dw/dt=0$ 線に近づくように動くので、図1で表されるように恒常状態に収束する鞍点経路が1本 ($P_{xy}-P_{xy}'$ 線) 存在する⁹。

以上で、 $x-z$ 平面上の収束経路を描写することはできた。次に w も含む3変数の収束経路を考える。 w の経路は(24)で表現されている。この式から、 w は x, z, w の3変数に依存することが判明する。そこで、(24)式の右辺第二項目をまず考える。図1で経済が収束経路上に存在すると仮定すれば均衡点の近傍で収束経路を線形近似する事ができる。この時、収束経路の傾きは(27)で表される $z = -\{(-\alpha)/(1-\alpha)\} \cdot x + \rho$ よりも小さいから収束経路は z 軸上で正の切片を持つ直線（一次関数）として表される。これを用いて(24)の右辺を z のみの関数として表すと、右辺は w 軸上で負の切片と正の傾きを持つ直線として表される。これを $x-w$ 平面に表したものが図2である。

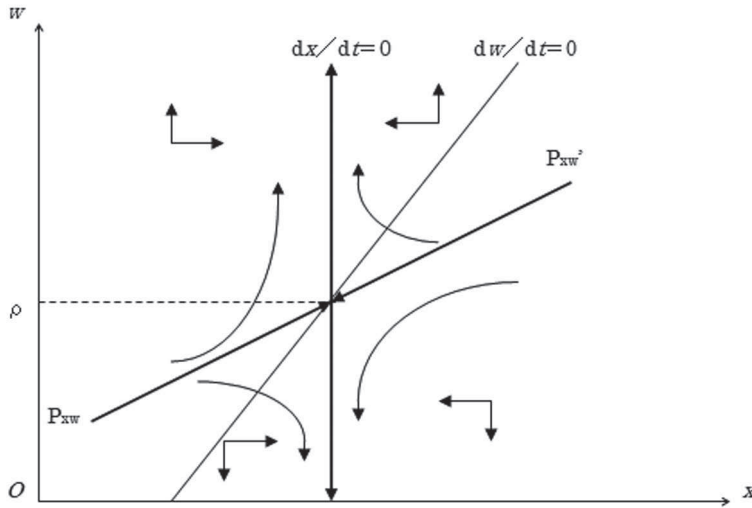


図2. $x-w$ 平面の位相図

経済は図2の収束経路上に存在するから x は常に均衡点に向かって収束する方向へ動く。従って図2のように均衡解に収束する鞍点経路が1本存在する。以上から $1-\alpha < \phi-\tau$ の場合に、図1と図2の収束経路を同時に満たす経路1本のみが恒常状態に収束する収束経路となる。

次に、収束経路 $P_{xy}-P_{xy}'$ 、 $P_{xw}-P_{xw}'$ を x, z, w の一次式（直線）として導出する。直線 $P_{xy}-P_{xy}'$ の傾きは以下のような式で表される。

⁹ 均衡解への収束条件については宮永（2000）p.79を参照のこと。

$$\frac{dz}{dx} = z' = \frac{\dot{z}}{\dot{x}} = \frac{z(x) \cdot \Gamma_z(x)}{x \cdot \Gamma_x(x)} = \frac{z(x) \cdot \left\{ \frac{-\alpha}{1-\alpha} x + z(x) - \rho \right\}}{x \cdot \left\{ \frac{\alpha(-1+\alpha+\phi-\tau)+\phi}{(1-\alpha)(-1+\alpha+\phi-\tau)} x + \frac{\phi-\tau+\phi}{-1+\alpha+\phi-\tau} z(x) \right\}}$$

これから、直線 $P_{xy}-P_{xy}'$ の傾きは以下のように導かれる。

$$z' = \frac{\eta_1 - \sqrt{\eta_1^2 - 4\eta_2\eta_3}}{2\eta_2}$$

$$\text{ただし、} \eta_2 = \frac{\phi + \phi - \tau}{-1 + \alpha + \phi - \tau} x^*, \quad \eta_3 = \left\{ \frac{\alpha}{1-\alpha} \right\} z^*,$$

$$\eta_1 = -2 \frac{\alpha(-1+\alpha+\phi-\tau)+\phi}{(1-\alpha)(-1+\alpha+\phi-\tau)} x^* + \frac{\phi-\tau+\phi}{-1+\alpha+\phi-\tau} z^* + \frac{-\alpha}{1-\alpha} x^* + 2z^* - \rho$$

さらに、収束経路は恒常的均衡点 (x^*, z^*) を通るから、直線 $P_{xy}-P_{xy}'$ は以下のような方程式で表される⁽¹²⁾¹⁰。

$$z = \frac{\eta_1 - \sqrt{\eta_1^2 - 4\eta_2\eta_3}}{2\eta_2} x + \left\{ z^* - \frac{\eta_1 - \sqrt{\eta_1^2 - 4\eta_2\eta_3}}{2\eta_2} x^* \right\} = z'^* x + l \quad (27)$$

直線 $P_{xw}-P_{xw}'$ の傾きについても同様に計算すれば、

$$w' = \frac{w^* \cdot \left\{ -\frac{\phi}{(1-\alpha)(-1+\alpha+\phi-\tau)} + \frac{1-\alpha+\phi}{-1+\alpha+\phi-\tau} z'^* \right\}}{\nu + \left\{ \frac{\phi}{(1-\alpha)(-1+\alpha+\phi-\tau)} x^* + \frac{1-\alpha+\phi}{-1+\alpha+\phi-\tau} (z'^* x^* + l) + 2w^* \right\}}$$

ただし、

$$\nu = \left\{ -\frac{\alpha(-1+\alpha+\phi-\tau)+\phi}{(1-\alpha)(-1+\alpha+\phi-\tau)} x^* + \frac{\phi-\tau+\phi}{-1+\alpha+\phi-\tau} (z'^* x^* + l) \right\} + x^* \cdot \left\{ -\frac{\alpha(-1+\alpha+\phi-\tau)+\phi}{(1-\alpha)(-1+\alpha+\phi-\tau)} + \frac{\phi+\phi-\tau}{-1+\alpha+\phi-\tau} z'^* \right\}$$

となり、均衡値 (x^*, w^*) を使えば、 $x-w$ 平面における収束経路が以下のように直線で近

¹⁰ 直線 $P_{xy}-P_{xy}'$ の傾きおよび方程式の導出は宮永（2002）数学注1-1を参照のこと。

似できる¹¹。

$$w = w'^*x + \{w^* - w'^*x^*\} = w'^*x + m \quad (28)$$

3-2. 収束過程の導出

前節で収束経路を直線近似する事ができたので、次に経済が時間とともに収束経路上をどのように動いていくかを導き出す。

位相図から導き出した収束経路は時間に依存しないので、経済が時間とともにどのように収束経路上を動いていくかについては描写できない。そこで、対数線形近似の手法を用いて時系列で経済がどう動いていくかを導出する。

対数線形近似は(22)～(24)式 (Y_x 、 Y_z 、 Y_w) を均衡点 (x^* 、 z^* 、 w^*) の近傍でテーラー展開した場合のヤコビ行列 J を用いて計算する⁽¹⁴⁾。

収束経路は位相図上で直線近似されているので、収束経路上の経済すなわちベクトル ($x(t)$ 、 $z(t)$ 、 $w(t)$) は相似縮小の形で均衡点に向かって動く。これは(22)～(24)で表される行列の固有ベクトル上を経済の初期値から均衡点まで固有値に従って動くことと考えられるから、数値シミュレーションを行うには初期値とヤコビ行列 J の固有値を求めることで得られる。均衡点 (x^* 、 z^* 、 w^*) でテーラー展開した時のヤコビ行列 J は

$$J = \begin{bmatrix} -\frac{\{\alpha(-1+\alpha+\phi-\tau)+\phi\}(\phi-\tau+\phi)}{(1-\alpha)(-\alpha+\phi)(-1+\alpha+\phi-\tau)} \cdot \rho & \frac{\{\alpha(-1+\alpha+\phi-\tau)+\phi\}(\phi+\phi-\tau)}{(1-\alpha)(-\alpha+\phi)(-1+\alpha+\phi-\tau)} \cdot \rho & 0 \\ \frac{-\alpha(\phi+\phi-\tau)}{(1-\alpha)(-\alpha+\phi)} \cdot \rho & \frac{\alpha(-1+\alpha+\phi-\tau)+\phi}{(1-\alpha)(-\alpha+\phi)} \cdot \rho & 0 \\ -\frac{(\phi+\phi-\tau)\phi}{(1-\alpha)(-\alpha+\phi)(-1+\alpha+\phi-\tau)} \cdot \rho & \frac{\{\alpha(-1+\alpha+\phi-\tau)+\phi\}(1-\alpha+\phi)}{(-\alpha+\phi)(-1+\alpha+\phi-\tau)} \cdot \rho & \rho \end{bmatrix}$$

だから、これから収束経路の固有値を計算すると以下ようになる。

$$\varepsilon = \frac{(J_{11} + J_{22}) - \sqrt{(J_{11} + J_{22})^2 - 4 \cdot (J_{11} \cdot J_{22} - J_{12} \cdot J_{21})}}{2}$$

ただし、 J_{ij} はヤコビ行列 J の第 i 行 j 列の要素を表す。

この固有値を用いれば t 期における各変数の値 $x(t)$ 、 $z(t)$ 、 $w(t)$ は、以下のように表せる。

$$x(t) = x^* \{1 - \exp(\varepsilon t)\} \cdot x(0)^{\{\exp(\varepsilon t)\}}$$

¹¹ 直線 $P_{xw} - P_{xw}'$ の傾きおよび方程式の導出は宮永 (2002) 数学注 1-2 を参照のこと。

$$z(t) = z^* \cdot \{1 - \exp(\varepsilon t)\} \cdot z(0)^{\{\exp(\varepsilon t)\}}$$

$$w(t) = w^* \cdot \{1 - \exp(\varepsilon t)\} \cdot z(0)^{\{\exp(\varepsilon t)\}}$$

$x(0)$ 、 $z(0)$ 、 $w(0)$ は各々 x 、 z 、 w の初期値である。

以上から、初期値 $x(0)$ 、 $z(0)$ 、 $w(0)$ が決まれば各期の変数 $x(t)$ 、 $z(t)$ 、 $w(t)$ を数値で表すことが可能になる。この結果を受けて、以下では初期値の導出を行うこととする。

通常の資本と労働で生産を行う生産関数なら、資本はストック変数であり、労働は外生変数となるので、位相図上では縦軸または横軸の変数のどちらかは初期条件（ストックの初期値）のみから初期値が決定され、その初期値に対応する収束経路上の点が経済の初期値となる。しかし、本モデルの生産関数はストック変数の資本と操作変数の資源消費量で構成されているので、資源消費量の操作いかんで初期値が変動するという問題点がある。そこで、本論文の2節で導出した収束経路を用いて資源消費量の初期値 $e(0)$ を導出する。消費量の初期値 $e(0)$ が導出できれば、 $x(0)$ 、 $w(0)$ が決まり、直線 $P_{xz} - P_{xz}'$ の方程式から $z(0)$ を導くことができる。

4. 数値シミュレーション：環境クズネッツ曲線の導出

4-1. 資源消費量初期値の導出

宮永（2009）では資源消費量の初期値を次のように導出している¹²。

$$\begin{aligned} \frac{e(0)}{r(0)} &= w^* \cdot (1-\alpha) A k(0)^{-\alpha+\phi} \cdot e(0)^{\alpha+\phi-\tau} + m \\ \text{より、} \\ w^* \cdot (1-\alpha) A k(0)^{-\alpha+\phi} \cdot e(0)^{\alpha+\phi-\tau} - \frac{1}{r(0)} \cdot e(0) + m &= 0 \end{aligned} \quad (30)$$

ここで、上式を $e(0)$ の関数とみて $w^* \cdot (1-\alpha) A k(0)^{-\alpha+\phi} \cdot e(0)^{\alpha+\phi-\tau}$ の $e(0)$ の次数を $\alpha+\phi-\tau=2$ と仮定することで、代数的な解を導出していた。

ここで、 $e(0)^{\alpha+\phi-\tau}$ の次数を構成する α 、 ϕ 、 τ はそれぞれ、資源が生産に占めるシェア（ $0 < \alpha < 1$ ）と経済全体の資源量に与える外部性（ $\phi-\tau > 1$ ）、汚染排出量が生産に与える外部性（ $\tau > 0$ ）である¹³。

$\alpha+\phi-\tau=2$ という条件は数値的には内生的成長を達成するのに問題の無い条件ではあるが、実際には枯渇性資源の使用量が産出量との対比からみて小さい、すなわち α が 0 に近い

¹² 資源消費量の初期値 $e(0)$ の導出については宮永（2009）および宮永（2002）数学注3を参照のこと。

¹³ 条件 $0 < \alpha < 1$ は仮定から、条件 $\phi-\tau > 1$ は内生的成長を可能にする条件から導出されている。

ということは十分に考えられることであり、それを考慮に入れるとモデル上では ϕ が 2 に近いという条件が初期値の解を導出する際に必要とされるのが問題であった。

そこで本論文では、まず $\alpha + \phi - \tau = 2$ という条件を緩和することで、より現実に近い数値シミュレーションモデルを構築することを試みる。

初期値 $e(0)$ を導出する前に、数値シミュレーションを行う前に必要なパラメータの値を設定する。設定すべきパラメータは、資源が生産に占めるシェア α ($0 < \alpha < 1$)、資本の外部性 $\phi(1 - \alpha + \phi > 1)$ 、割引率 ρ 、生産関数のパラメータ A 、汚染排出量が生産に与える外部性 τ である。資源の外部性 ϕ についてはパラメータを設定の後、 $\phi - \tau > 1$ の条件に従い任意に設定する。

以上の制約と宮永 (2009) との比較を考慮して、以下のようにパラメータを設定した。その値は $\alpha = 0.1$ 、 $\phi = 0.9$ 、 $\rho = 0.03$ (=3%)、 $A = 0.05$ 、 $\tau = 0.01$ これらは宮永 (2009) と同じである。この設定の後、パラメータ ϕ を任意に設定して比較を試みる。

本論文ではパラメータ ϕ を 3 つ設定して数値シミュレーションを行い結果を比較した。その値は case ① $\phi = 1.91$ 、case ② $\phi = 1.5$ 、case ③ $\phi = 1.3$ である。case ① $\phi = 1.91$ は宮永 (2009) と同じ値であり、初期値も同様に 2 次方程式の解の公式を用いて代数的に算出したものを使用する。

case ② と case ③ については、上記のパラメータを代入の後、(30) 式左辺の $e(0)$ に数値を代入し、(30) 式左辺の値が最も 0 に近い値 $e(0)$ を初期値とする方法を用いた。具体的には $e(0)$ について有効数字を小数点以下 3 位までと設定し、 $e(0)$ に 0.001 刻みで数値を代入して (30) 式左辺の値が最も 0 に近い $e(0)$ の値を初期値として採用した。

4-2. 環境クズネッツ曲線の導出

本節で前節で設定したパラメータに加え、ストック変数の資源の賦存量 $r(0)$ および資本の賦存量 $k(0)$ を設定してシミュレーションを行い、宮永 (2014) で行われたパラメータ調整が本モデルにはどのような影響があるのかを検討する。

宮永 (2009) と比較するためにストック変数の資源の賦存量 $r(0)$ および資本の賦存量 $k(0)$ を $r(0) = 30$ 、 $k(0) = 20$ と設定している。期間も宮永 (2009) と同様に 50 期間 ($t = 50$) としてシミュレーションを行った。

初期値 $e(0)$ は各々以下の通りである。

case ① $\phi = 1.91$ のとき、 $e(0) = 0.387383673$ (代数的に算出)¹⁴

case ② $\phi = 1.5$ のとき、 $e(0) = 0.249$

case ③ $\phi = 1.3$ のとき、 $e(0) = 0.173$

¹⁴ この値は宮永 (2009) のモデルと同じである。

このときの経済成長率の推移を示したものが図3、環境クズネッツ曲線を描いたものが図4である。経済成長率の推移は経済成長モデルの条件として「経済の収束仮説」が第一に満たされる必要があることから、経済成長率が時間と共に低下していくかどうかを確認するためのものである。

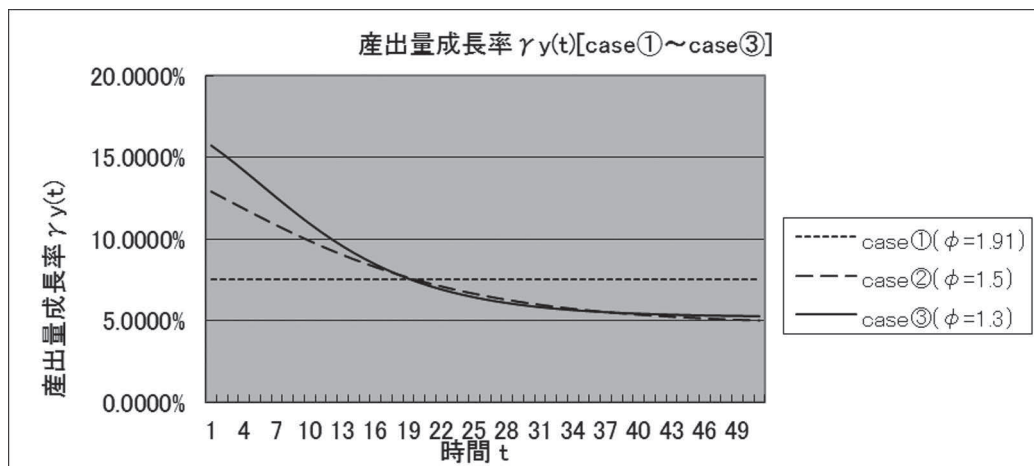


図3. 産出量成長率：時系列データ

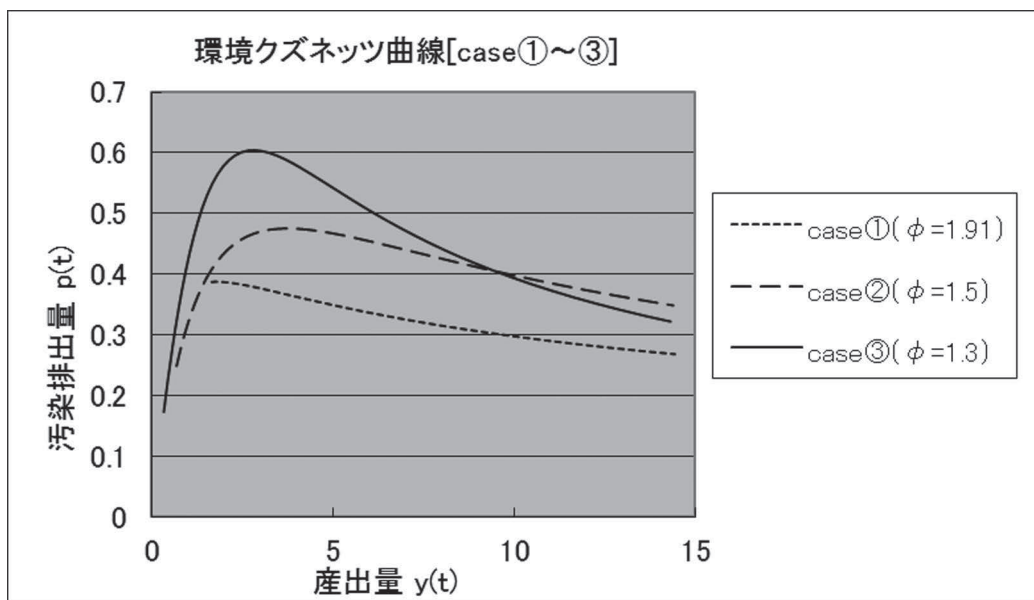


図4. 環境クズネッツ曲線：産出量－汚染物質排出量相関

「経済の収束仮説」に関連する産出量の初期成長率 $\gamma_{y(0)}$ と均衡成長率 γ_y^* はそれぞれ

case ① $\phi=1.91$ のとき、 $\gamma_{y(0)}=7.4904\%$ 、 $\gamma_y^*=7.5000\%$

case ② $\phi=1.5$ のとき、 $R_{y(0)}=12.9041\%$ 、 $R_y^*=5.9625\%$

case ③ $\phi=1.3$ のとき、 $R_{y(0)}=15.7238\%$ 、 $R_y^*=5.2125\%$

となる。

上の $R_{y(0)}$ 、 R_y^* の値と図 3 から、宮永 (2009) モデルと同じ場合の case ① $\phi = 1.91$ の場合を除いて、「経済の収束仮説」は満たされていることが分かる。また産出量と汚染物質の関係については、いずれの場合でも環境クズネツ曲線は逆 U 字型の関係が満たされていることが分かる¹⁵。

5. まとめと課題

以上の分析から、パラメータ設定条件の緩和とパラメータ数値の調整を施すことにより宮永 (2009) モデルで示された「環境クズネツ曲線」を改良し、「経済の収束仮説」と「環境クズネツ曲線」を同時に満たすという目的は達成することができたと思われる。また、図 4 の case ②と case ③をみるとパラメータ調整の効果は環境クズネツ曲線の形状をコントロールすることが可能なようにも考えられることから、当初の目的である二酸化炭素ガスだけでなく、同様に化石燃料等が主原因と考えられる大気汚染や水質汚染など他の環境問題への応用も可能であろうと思われる。

しかし、まだいくつかの課題も存在している。Stokey (1998) のシステムが示すように、汚染物質と環境の関係は、汚染物質のフローが直接環境に影響する部分だけでなく、汚染物質の蓄積（ストック）が環境に影響するという部分もある。今後は本モデルを汚染物質のストックが経済に与える影響を分析可能なように改良することを課題としたい。

参考文献

- 浅子和美・川西諭・小野哲生 (2002) 「枯渇性資源・環境と持続的成長」, 『経済研究』, 53, pp. 236-246.
- 宮永輝 (1995) 「有限の資源制約が存在する場合の内生的成長理論」, 『経済科学』, 第 43 巻 第 2 号, pp.9-20.
- 宮永輝 (2000) 「有限の資源制約が存在する場合の内生的成長理論Ⅱ. 一市場経済モデル」, 『政治・経済・法律研究』, 第 3 巻 第 2 号, pp.69-86.
- 宮永輝 (2002) 「有限の資源制約が存在する場合の内生的成長理論Ⅲ. 一数値シミュレーションを用いた「収束仮説」の証明」, 『政治・経済・法律研究』, 第 4 巻 第 2 号, pp.97-114.
- 宮永輝 (2009) 「枯渇資源と環境が経済成長に与える影響の一考察—有限の資源制約が存在す

¹⁵ 図 4. のグラフではわかりづらいが、case ①でもわずかながら逆 U 字の左方部分（汚染排出量が上昇する部分）は存在している。宮永 (2009) p.75 図 6 を参照。

- る場合の内生的成長理論を用いて—, 『政治・経済・法律研究』, 第12巻 第1号, pp. 61-78.
- 宮永輝 (2014) 「有限の資源制約が存在する場合の内生的成長理論Ⅴ. 一数値計算を利用したモデルの精緻化—, 『政治・経済・法律研究』, 第17巻 第1号, pp.65-81.
- Arrow, K. J. (1962) "The Economic Implications of Learning by Doing," *Review of Economic Studies*, 29, pp.155-173.
- Barro, R. J. and X. Sala-i-Martin (1995) *Economic Growth*, McGraw-Hill.
- Cass, D. (1965) "Optimum Growth in an Aggregative Model of Capital Accumulation," *Review of Economic Studies*, 32, pp.233-240.
- Hammond, P. J. and A. Rodriguez-Clare (1993) "On Endogenizing Long-Run Growth," *Scandinavian Journal of Economics*, 95, 4, pp.391-425.
- Hotelling, H. (1931) "The Economics of Exhaustible Resources," *Journal of Political Economy*, 2, pp.137-175.
- Koopmans, T. C. (1965) "On the Concept of Optimal Economic Growth," in *The Econometric Approach to Development Planning*, Amsterdam, North Holland.
- Kuznets, S. (1955), "Economic Growth and Income Inequality," *American Economic Review*, 45, pp.1-28.
- Ramsey, F. (1928) "A Mathematical Theory of Saving," *Economic Journal*, 38, pp.543-559.
- Romer, P. M. (1986) "Increasing Returns and Long Run Growth," *Journal of Political Economy*, 94, pp.1002-1037.
- Romer, P. M. (1987) "Growth Based on Increasing Returns Due to Specialization," *American Economic Review*, 77, 2, pp.56-62.
- Sheshinski E. (1967) "Optimal Accumulation with Learning by Doing," in Karl Shell ed., *Essays on the Theory of Optimal Economic Growth*, Cambridge MA, MIT Press, 1967, pp.31-52.
- Solow, R. M. (1956) "A Contribution to the Theory of Economic Growth," *Quarterly Journal of Economics*, 70, pp. S65-S94.
- Stern, N. (2007) *The Economics of Climate Change: The Stern Review*, Cambridge University Press
- Stiglitz, J. E. (1974) "Growth with Exhaustible Resources. Efficient and Optimal Growth Paths," *Review of Economic Studies*, Symposium, pp.123-137.
- Stokey, N. L. (1998), "Are There Limits to Growth?," *International Economic Review*, 39, pp. 1-31.
- World Bank (1992), *World Development Report 1992: Development and the Environment*, Oxford University Press.